Matematisk statistik TMS063
Tentamen 2018-10-12

Tid: 8:00-12:00 **Tentamensplats:** SB
Hjälpmedel: Bifogad formelsamling och tabell samt Chalmersgodkänd räknare.
Kursansvarig: Olof Elias
Telefonvakt/jour: Olof Elias, 0762026293. Till salen ca 9.30 och 11.30
Betygsgränser: För betyg **3**, **4** resp. **5** krävs minst **12**, **18** resp. **24** poäng.
För att bli godkänd på kursen krävs godkänt på tentan **och** godkänt resultat på båda flervariabel-duggorna.
Till varje uppgift skall fullständig lösning lämnas!

---

1. Antag att man kastar två vanliga tärningar oberoende av varandra. Avgör om händelserna

$$A = \{\text{Summan av tärningskasten är udda}\},$$
$$B = \{\text{Produkten av tärningskasten är jämn}\}$$

är oberoende eller ej. **5 poäng**
Lösning. Det finns två sätt att lösa denna uppgift. Det ena är att observera att

$$A \cap B \subset B$$

vilket direkt implicerar att A och B inte kan vara oberoende.

Det andra är att beräkna sannolikheterna:

Detta görs enklast om man ritar upp alla utfall i xy-planet. Vi räknar först ut $P(A \cap B)$. Vi observerar följande

$$A \cap B = \{\text{ Ena tärningen måste visa ett och den andra måste visa jämnt}\}.$$

Detta ger en sannolikhet på

$$P(A \cap B) = 6/36,$$

då dom enda möjliga utfällen är: $\{(1,2),(2,1),(1,4),(4,1),(6,1),(1,6)\}$. Å andra sidan så får man

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1 - 9/36 = 3/4$$

vilket ger

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{3}{8}$$

2. Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med fördelningsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \sin(x) & x \in [0, \pi/2], \\ 1 & x > \pi/2. \end{cases}$$

Bestäm tätheten samt väntevärdet av X. **2+2 poäng**
Lösning: Tätheten ges av

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \cos(x), & x \in (0, \pi/2) \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

vilket ger väntevärde:

$$E[X] = \int_0^{\pi/2} x \cos(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\pi - 2).$$

3. Låt $N(t)$ vara en Poisson process sådan att väntevärdet av $N(3)$ är 7.

   (a) Bestäm intensiteten och beräkna sannolikheten att man måste vänta minst 4:a tidsenheter tills att man observerar första händelsen. **1+2 poäng**

   (b) Beräkna sannolikheten att man observerar 2 eller fler händelser i intervallet $[0, 4]$. **2 poäng**

   Lösning: Intensiteten bestäms av

$$3\lambda = E[N(3)] = 7 \Rightarrow \lambda = 7/3.$$

Låt X vara tiden tills första händelse. Då är $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ vilket ger

$$P(X > 4) = \mathrm{e}^{-\frac{7}{3}4}.$$

Att beräkna (b) görs genom :

$$P(N(4) \geq 2) = 1 - P(N(4) \leq 1) = 1 - \frac{28}{3}\mathrm{e}^{-\frac{28}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{28}{3}}$$

4. Låt X vara en diskret slumpvariabel som antar värdena $\{0, 1\}$ definerad enligt

$$P(X = 0) = c(\alpha)\alpha, \ P(X = 1) = \frac{c(\alpha)}{\alpha}, \alpha > 0,$$

där c är en funktion av α som gör att ovanstående uttryck är en täthet. Låt $x_1, ..., x_n$ vara ett observerat stickprov från X. Beräkna Maximum-likelihood skattaren av α. **6 poäng**
Lösning: Vi börjar med att bestämma $c(\alpha)$:

$$P(X = 0) + P(X = 1) = 1 \Leftrightarrow c(\alpha) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

vilket ger

$$P(X = 0) = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}, \ P(X = 1) = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Låt $k = \sum_{i=1}^n x_i$ vara antalet 1:or ur vårt stickprov då ges likelihoodfunktionen ges av

$$L(\alpha|x) = \prod_1^n P(X = x_i) = \frac{1}{(1 + \alpha^2)^n}\alpha^{2(n-k)}$$

vilket ger log-likelihood:

$$l(\alpha|x) = 2(n-k)\log(\alpha) - n\log(1+\alpha^2).$$

Derivatan ges därmed av

$$l'(\alpha|x) = \frac{2(n-k)}{\alpha} - \frac{2\alpha n}{1+\alpha^2} = -\frac{2(k\alpha^2+k-n)}{\alpha(\alpha^2+1)}.$$

Då täljaren är negativ för tillräckligt små α och positiv tillräckligt stora α så är det tydligt att l' byter tecken någonstans vilket svarar mot maximum likelihood-skattaren. Detta maximum fås av att sätta $l'(\alpha) = 0$ vilket ger

$$\frac{2(n-k)}{\alpha} - \frac{2\alpha n}{1+\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{n-k}{k}.$$

5. Ett nytt parti kallat Bestämmarna planerar att ge sig in i kommunalvalet i Vilhelmina kommun år 2022. För att försöka uppskatta sin chans till att få ett mandat i kommunen undersöker de vad folket tycker om att värma fisk i microvågsugnen, Bestämmarnas hjärtefråga. Av de 100 personer som deltog i undersökningen svarade 62 personer att de emot användandet av microvågsugn.

   (a) Ange ett tvåsidigt 99%-igt konfidensintervall för den sanna proportionen p. **2 poäng**

   (b) Hur stort måste stickprovet vara för att halvera längden i konfidensintervallet i (a) om man använder sig av samma signifikansnivå. **3 poäng**

   Lösning:
   (a)
   Konfidensintervallet ges av

   $$\frac{62}{100} \pm 2.576\sqrt{\left(\frac{62}{100}(1-\frac{62}{100})\right)/100} = [0.494964..., 0.745036...] = I$$

   (b)
   Här kan man både använda sig av den skattade kvantiteten $\hat{p} = 62/100$ eller låta $\hat{p} = 1/2$ vilket ger en övre skattning på n.

   Längden av intervallet blir då

   $$|I| \approx 0.25$$

   Låt $\hat{p} = 62/100$, vi har att

   $$2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = |I|/2 \Leftrightarrow n = \left(\frac{4z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{|I|}\right)^2$$

6. I en fabrik produceras förpackningar som påstås rymma 1 liter. För att säkerställa kvalitén tar man ett stickprov på 50 förpackningar och mäter därefter dess volym. Utifrån detta stickprov erhåller man följande

   $$\bar{x} = 1.34, s^2 = 2.9.$$

Välj signifikansnivå, ställ upp lämplig hypotes och testa därefter om förpackningarna faktiskt rymmer 1 liter. **5 poäng**
Lösning: Låt $\alpha = 0.05$. Hypotesen ges av

$$H_0 : \mu = 1$$
$$H_1 : \mu \neq 1.$$

Man kan genomföra testet på olika sätt. Enklaste är kanske att normal-approximera teststatistikan och därefter beräkna p-värdet som ges av

$$2(1 - \Phi(|t_{\text{obs}}))$$

där

$$t_{\text{obs}} = (\bar{x} - 1)/(s^2/\sqrt{n}).$$